等方性乱流の超高次構造関数(流れの不安定性と乱流の構造)

細川, 巌; 山本, 稀義

数理解析研究所講究録
719巻 1990年 207-218

等方性乱流の超高次構造関数

電通大　細川　巖　(Iwao Hosokawa)
航技研　山本稀義　(Kiyoshi Yamamoto)

1．研究の目的

ある変数のゆらぎを定量的にみるために構造関数という概念が登場し，乱流ではAnselmet et al[1)]が速度構造関数 $\langle[u(x+r)-u(x)]^n\rangle \sim r^{\zeta_n}$ を実験的に調べ，rの慣性領域でべき指数 ζ_n を $n=18$ まで求め，既成の統計理論（βモデル，lognormal理論）と比べている。〈　〉は平均操作を意味する。

速度の構造もさることながら，dissipation の構造も乱流の特性を示す重要な統計量であるから，さらに

$$\langle\varepsilon_r{}^q\rangle/\varepsilon_L{}^q \sim (r/L)^{-\mu_q} \qquad (1)$$

を考えよう。ε_rはrの直径の球内のdissipationの平均値，Lは等方性乱流を包含するmacroscaleである。μ_qはintermittency exponent と呼ばれ，$\zeta_n = n/3 - \mu_{n/3}$ の関係がある。

このようなべき法則がどのように存在し，μ_qがqと共にどう変化するかを，典型的な等方性乱流[2)]において定量的に調べようというのが，当面の目的である。実験ではεは直接扱えず，$(\nu/2)(\partial u/\partial x)^2$などの量の1次元平均で代表させている現状であるから，この研究は興味がある。われわれは正しいεを計算し，3次元平均を使い，(1)の関係を $-30\leqq q\leqq 30$について調べた。

2．Multifractal theory との理論的関連

intermittency exponent μ_qが，最近カオスの研究方法論として確立したmultifractal theory とどう関係するかを注意しておこう。Hentschel & Procaccia[3)]は generalized dimension D_q を次のように導入した。

$$\Sigma_i{}^N p_i{}^q = (r/L)^{(q-1)D_q} \quad \text{for } r/L \to 0 \tag{2}$$

ここに$p_i = E_r{}^{(i)}/E_L$で，（乱流においては）E_rは辺rのd次元箱内のtotal dissipation と考える。Nは辺Lの箱に含まれるすべてのdisjointな辺rのsubboxの数である。従って，$E_r \sim \varepsilon_r r^d$，$E_L \sim \varepsilon_L L^d$，$N = r^d/L^d$ の関係から，(1),(2)を同一のものと見ることができ，

$$-\mu_q = (q-1)(D_q - d) \tag{3}$$

が得られる。カオス－システムのf－αスペクトルは，

Meneveau & Sreenivasan[4)]により，D_qが分かれば，

scaling index: $\alpha = d/dq[(q-1)(D_q - d + 1)]$

spectrum of α : $f(\alpha) = \alpha q - (q-1)(D_q - d + 1) + d - 1$

のようになる。これらはμ_qの重要性を再認識させる。

しかし，(1)から(2)への移行は無条件ではない。(1)のようなべき法則は慣性領域での話であり，(2)では $r/L \to 0$ とはいっても，無限に小さくself-similarityが成り立つような場合は自然界には多くはない。乱流の場合には(2)は慣性領域以下にまでは適用できないと思われる。このことを確認しておかないと(1)と(2)の関連は破れ，(3)は成り立たないであろう。

3. 結果の説明

Fig. 1 は $q > 0$ において$\langle \varepsilon_r{}^q \rangle / \varepsilon_L{}^q$の r 依存を示す。rが小さいほどdissipationのモーメントは大きくなり，dissipationのゆらぎがいかに大きいかが分かる。破線で挟まれた部分が，われわれの行ったdirect simulation（DS）[2)]においてfully-developed state に達した（ $t = 10$)乱流のエネルギースペクトルの慣性領域の波数に対応するeddy length の部分である。この範囲でべき法則を認定することは容易であろう。λで示した長さはTaylor's microscaleである

。Fig. 2 は$q<0$において，前と同じことを行った。負のモーメントの概念は全く新しいが，慣性領域のべき法則は認められよう。Fig. 1 は大きいdissipationのゆらぎを強調したのに対し，Fig. 2 はゼロに近い小さいdissipatonのゆらぎを強調する。Fig. 3 に極端な場合を示す。

Fig. 4 には，DSによるμ_q（◇で示す。）のほかに，現在手に入るほとんどのデータを書き入れた。×はAnselmet et al[1]の実験値，□はAntonia et al[5]の実験値，├─┤で示したのはMeneveau & Sreenivasan[4]の誤差ぐるみの実験値である。誤差が大きいのは，彼等がD_qの実験値を得るときに慣性領域を正確に把握していないことと，$(\partial u/\partial x)^2$の1次元データの量が十分でないことによると思われる。●はCantor set を使った彼等の理論(p－model ）である。○はsquare-root exponential model[6]，＋はBenzi et al[7]によるrandom β modelである。DSの結果からみて，p－model は定性的に最も有望であるが，$|q|$の大きいところでの漸近行動はかなり外れる。β model とlognormal理論が点線で描かれている。

Fig. 5 は，DSのμ_qから(3)式を使ってD_qを出し，Meneveau & Sreenivasan の結果に重ね書きをしたものである。$D_{-\infty}$の値にこれほどの違いがあると，別の理論が必要であろ

う。

DSについて興味のあるμ_q値を挙げておこう。

i) $\mu_2 = \mu = 0.19$

これは最近定説になりつつある値を支持する。

ii) $\mu_{2/3} = -0.018$

区間[0,1]では$\mu_q < 0$に注意。この値は$<\varepsilon^{2/3}>$にもとずくKolmogorov index (-5/3)の intermittency correction を示す。(lognormalの場合は$-\mu/9$。)

iii) $\mu_{3/2}/\mu = 0.411$

$\varepsilon \sim (\partial u/\partial x)^2$を仮定すれば，(1)から，この量がskewness-kurtosis関係のpower index ($\log s/\log \delta$)になることが容易に分かる。(lognormalの場合は3/8。)実際これをFig. 6に示す。

4. DSにおける平均操作

< >について，DSでやった方法を説明する。われわれはL＝4πの立方体の中に周期性乱流をもっている。この中に均等に8^3個の格子点をとり，これらを中心とする直径rの球をつくって，その中でε_rを計算し，これの8^3個の平均をとるのである。ほかにもいろいろな平均操作は可能であるが，rの変化に対して平均データのバラツキがみられないこと

から，これで十分であると考えている。〈　〉を１次元平均でとると，話は全く別で，8^3をはるかにこえるアンサンブルをとってもバラツキは絶えないのである。

参考文献

1) F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger and R. A. Antonia, J. F. M. 140 (1984) 63.

2) K. Yamamoto and I. Hosokawa, J. P. S. J. 57 (1988) 1532.

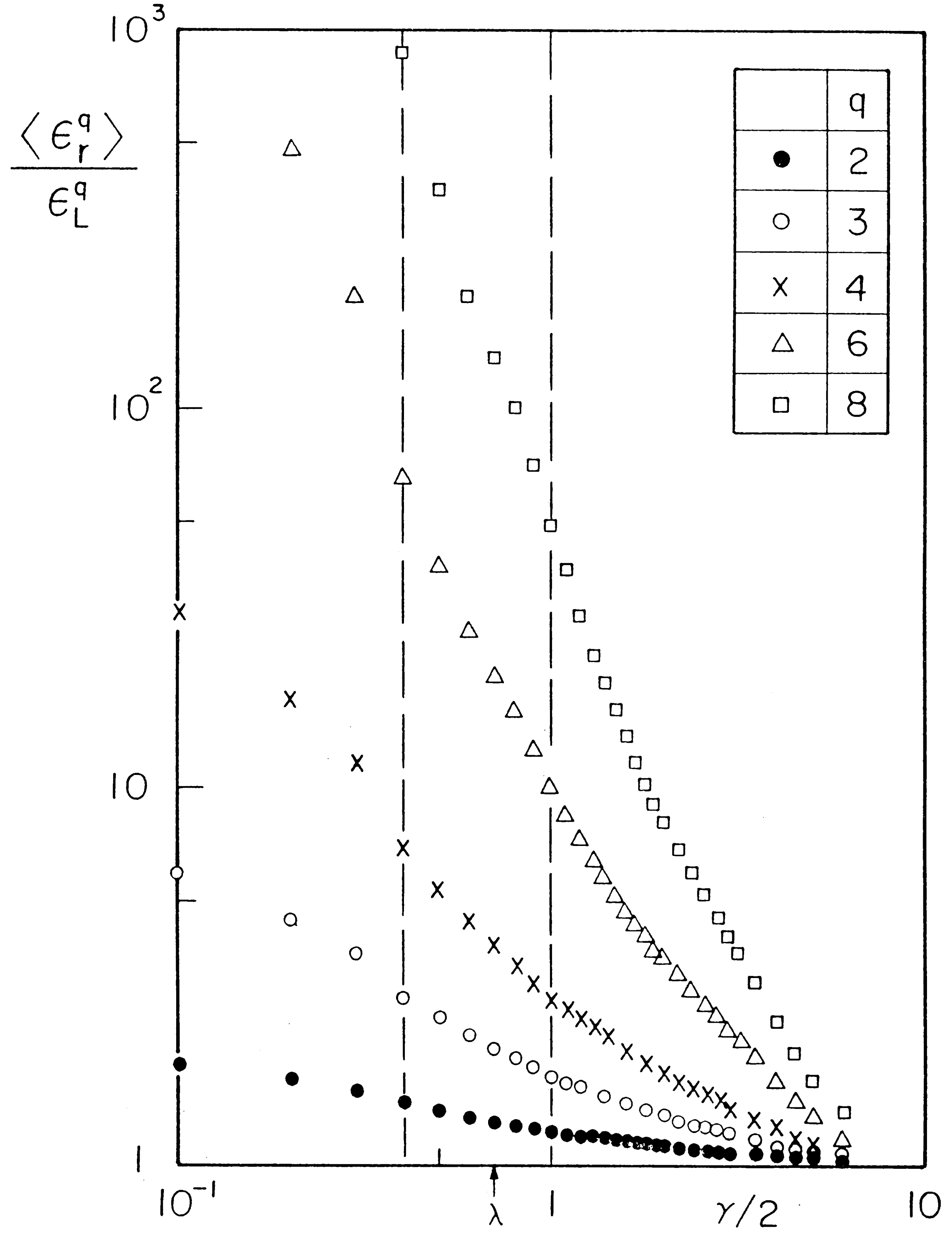
3) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, Physica 8D (1983) 435.

4) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1424.

5) R. A. Antonia, B. R. Satyaprakash and A. K. M. Hussain, J. F. M. 119 (1982) 55.

6) I. Hosokawa, Phys. Fluids 32 (1989), to appear.

7) R. Benzi, G. Paradin, G. Parisi and A. Vulpiani, J. Phys. A17 (1984) 3521.



10^3
10^2
10
1
$\frac{\langle \epsilon_r^q \rangle}{\epsilon_L^q}$
10^{-1}
λ
$r/2$
10
q
2
3
4
6
8

FIG. 1

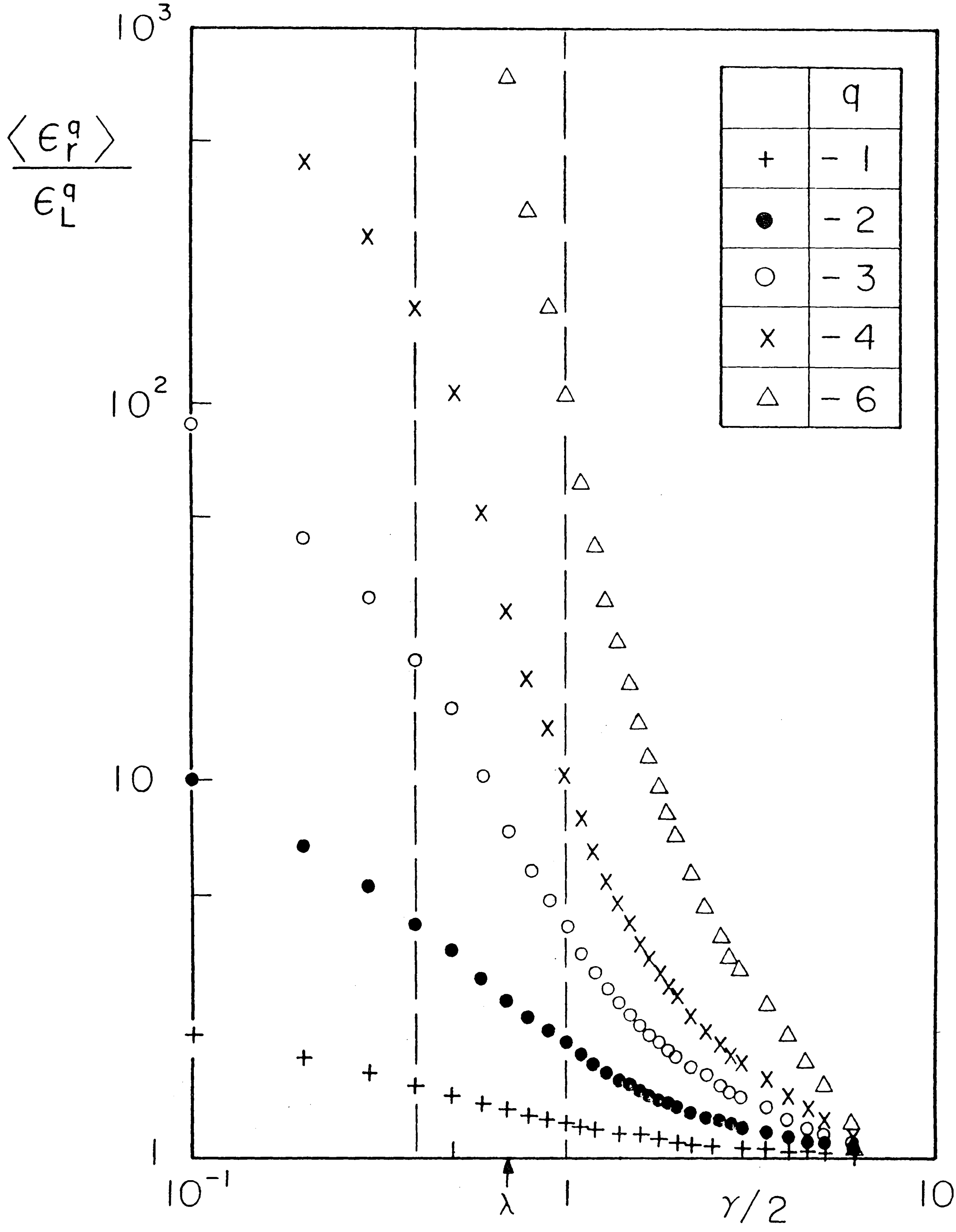

$\frac{\langle \epsilon_r^q \rangle}{\epsilon_L^q}$
10^3
10^2
10
1
10^{-1}
λ
γ/2
10
q
+ -1
● -2
○ -3
x -4
△ -6

FIG. 2

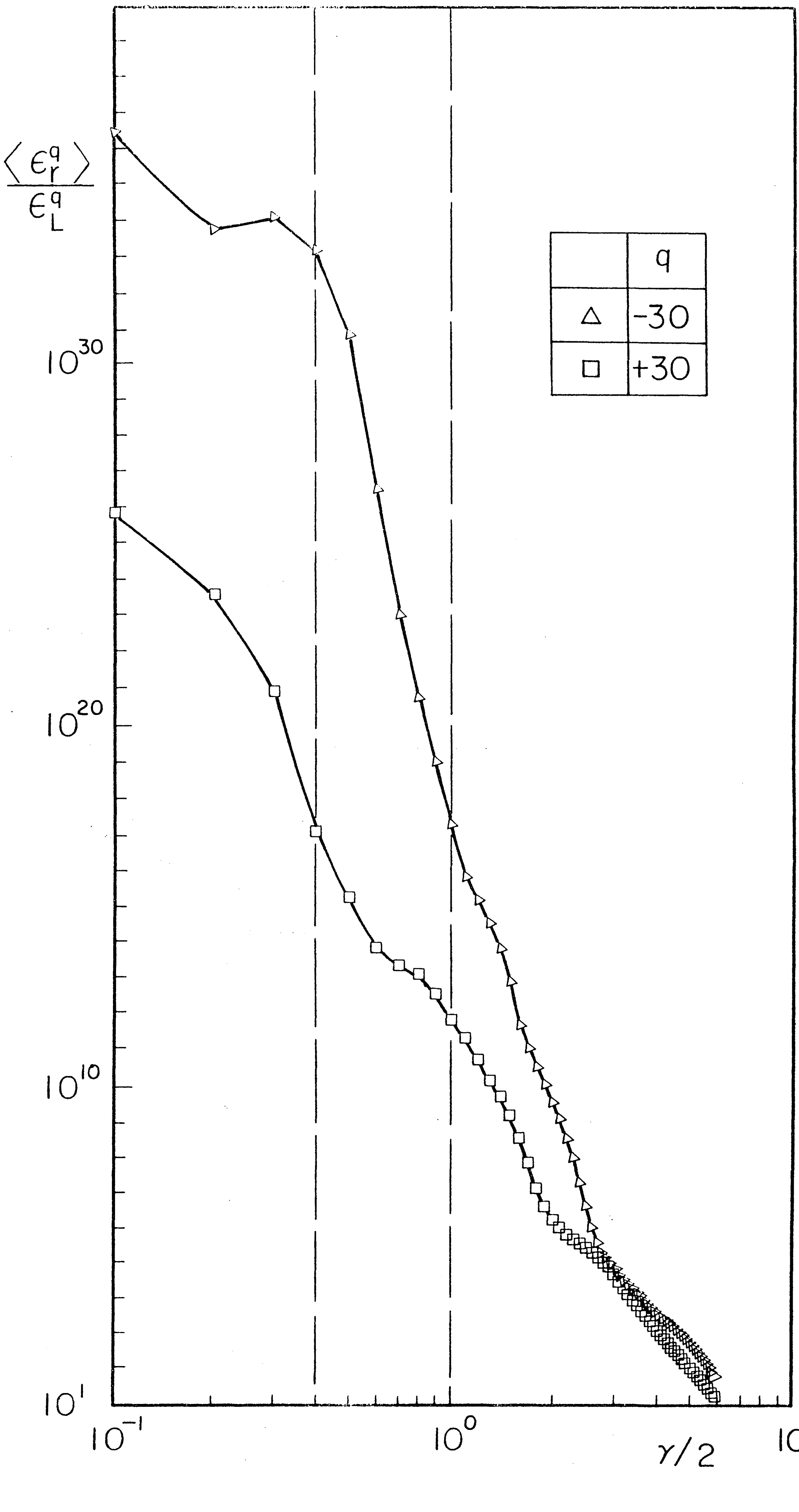

$\frac{\langle \epsilon_r^q \rangle}{\epsilon_L^q}$
10^{30}
10^{20}
10^{10}
10^{1}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
$r/2$
q
△ -30
□ +30

FIG. 3

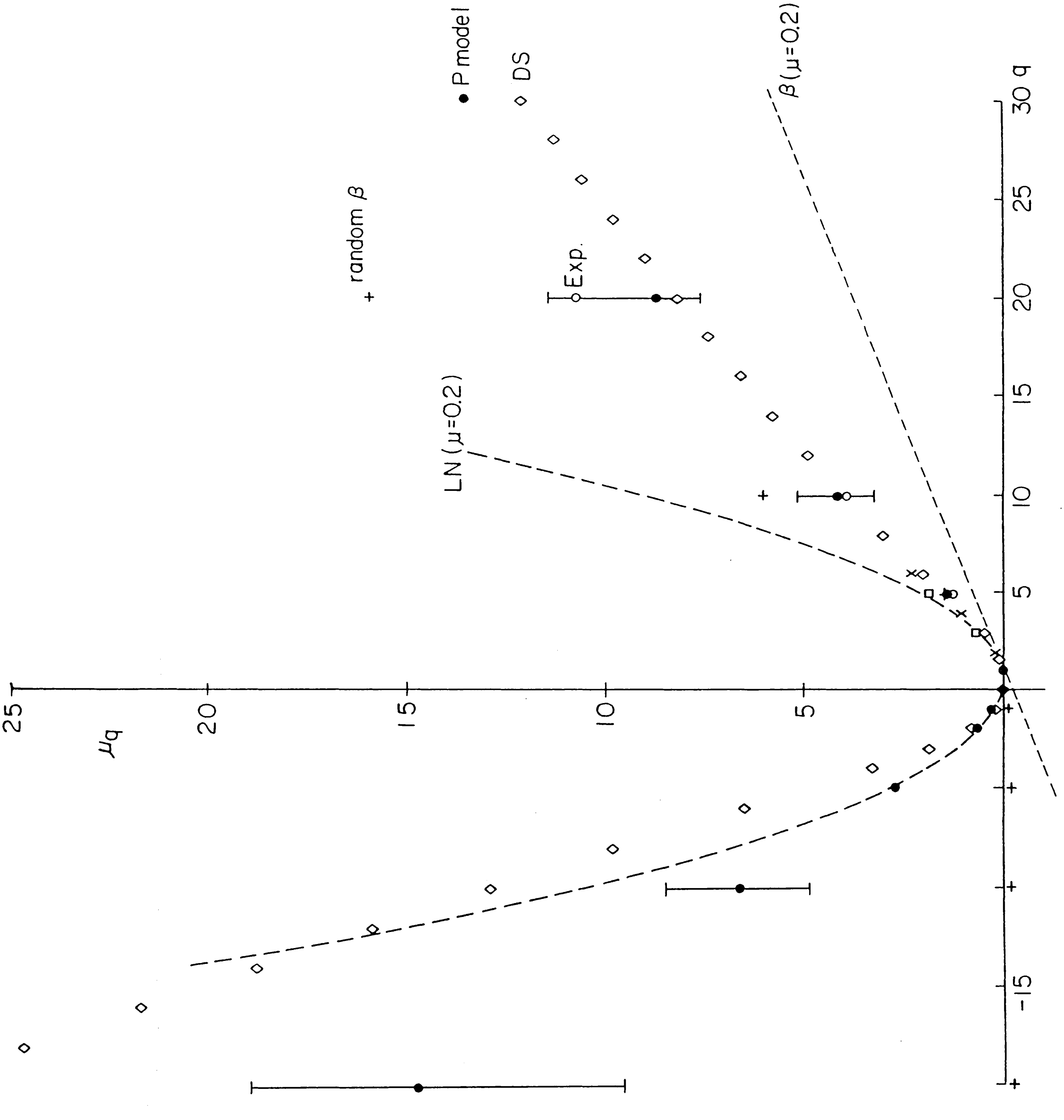


FIG. 4

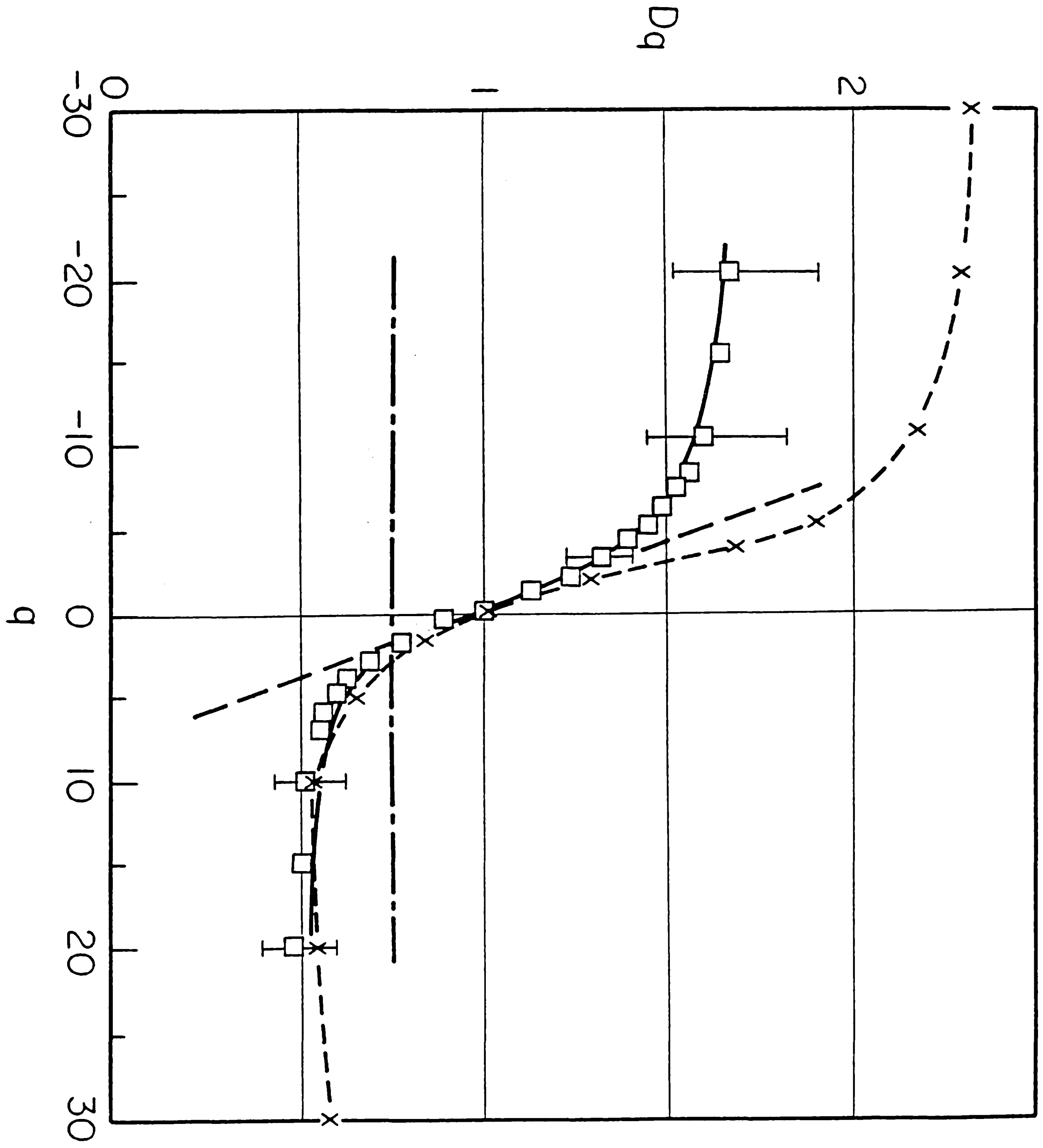
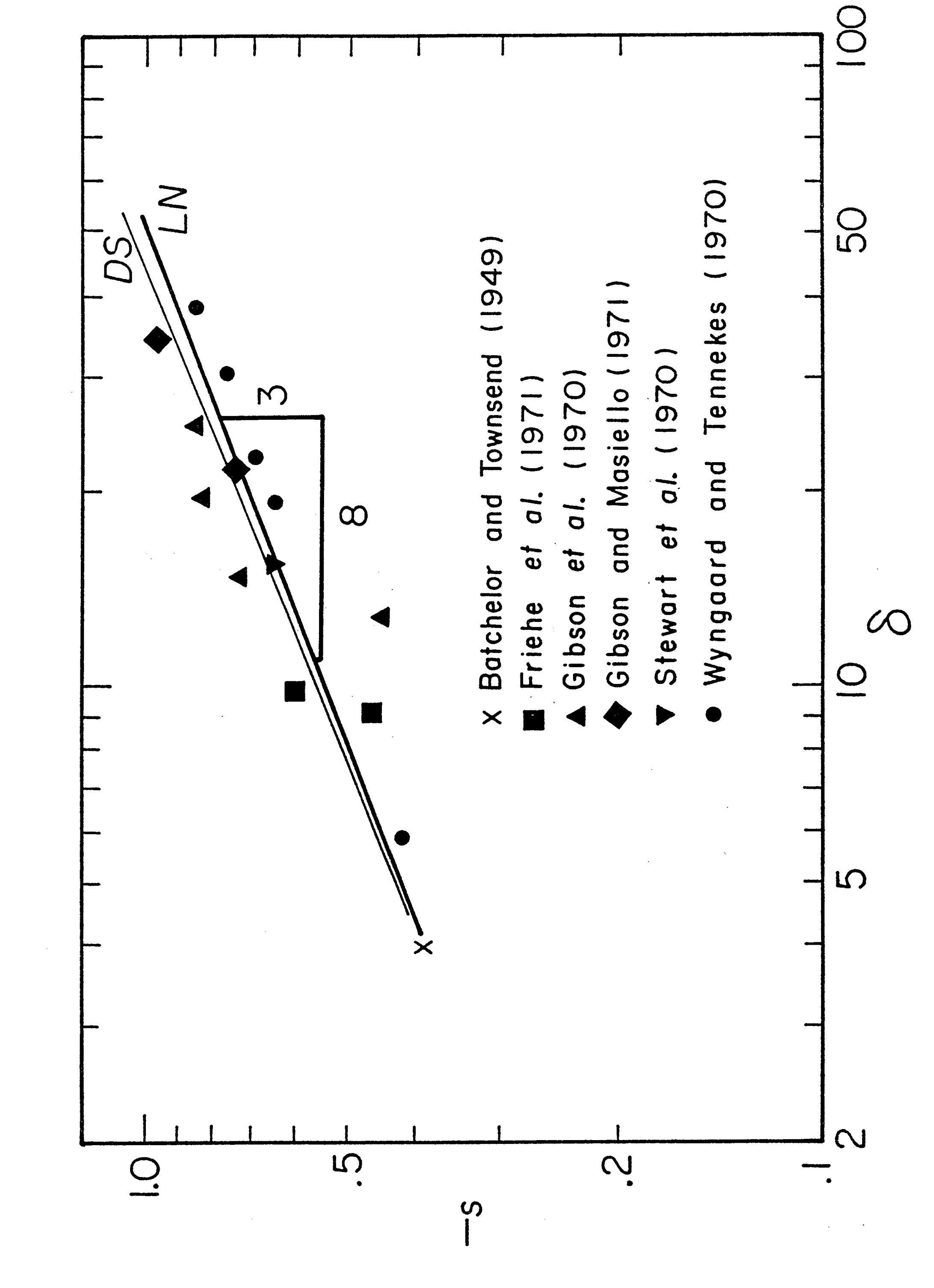


FIG. 5



DS
LN
3
8
x Batchelor and Townsend (1949)
■ Friehe et al. (1971)
▲ Gibson et al. (1970)
◆ Gibson and Masiello (1971)
▼ Stewart et al. (1970)
● Wyngaard and Tennekes (1970)
2
5
10
50
100
δ
1.0
.5
.2
.1
−s

FIG. 6